MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique

Par
Lakehal Ibrahim

Sujet

Application du point fixe sur les équations différentielles fractionnaires

Devant le jury :

M. Nadir Mostefa	Prof.Univ de M'sila	Président
M. Gagui Bachir	M.C.A. Univ de M'sila	Rapporteur
M. Khirani Amina	B.C.B. Univ de M'sila	Examinateu

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu ***Allah*** *qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail. Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur* **Gagui Bachir** *qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et de m'a voir guidé. Leurs critiques et Leurs conseils m'ont été trés précieux. De même je remercie Mrs* ***Mostefa Nadir*** *et Mdm* ***Amina Khirani*** *qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail*

Merci à tous les enseignants et les étudiants que j'ai connu tout au long de ma carrière

Enfin , je voudrais associer à mes remerciement tous qui ont contribué de prés ou de lion à l'aboutissement de ce travail .

Merci

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :
-A mes parents,
-A mes frères,
-A mes soeures,
-A toute la famille,
-A tous mes disciples,
-A tous les amis et compagnons
Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,
En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Ibrahim

Table des matières

Introduction **III**

1 Définitions et notions de base **1**

1.1 Fonctions spéciales 1

1.1.1 Fonction Gamma d'Euler 1

1.1.2 Fonction Beta d'Euler 4

1.1.3 Fonction de Mittag-Leffter 5

1.2 Intégrale fractionnaire 6

1.2.1 Intégrale de Riemann-Liouville 6

1.2.2 Intégrale de Katugampola 8

1.3 Dérivées fractionnaire 9

1.3.1 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville 9

1.3.2 Dérivées fractionnaires de Caputo 12

1.3.3 Dérivées fractionnaires de Katugampola 16

1.4 Théorèmes de point fixe 18

2 Résultat d'Existence de la solution des Équations Différentielles d'ordre Fractionnaire **20**

2.1 Equations Différentielles Fractionnaires de type Riemann-Liouville . . 20

2.1.1 Lemmes Fondamentaux 20

2.1.2 Résultat d'Existence 23

2.2 Equations Différentielles Fractionnaires de Type Caputo 26

2.2.1 Lemmes Fondamentaux 27

2.2.2 Problème de Cauchy dans le cas $0 < \alpha < 1$ 28

2.2.3 Problème aux Limites dans le cas $0 < \alpha < 1$ 31

2.3 Equations Différentielles Fractionnaires de Type Katugampola 37

2.3.1 Lemmes Fondamentaux 37

2.3.2 Résultat d'Existence 39

Conclusion **47**
Bibliographie 48

Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel. Son histoire remonte à L'Hôpital (1693) qui se pose la question d'interpréter la dérivée d'ordre 1/2. C'est Lacroix (1879) qui montre que pour $f(x) = x^a$ et $a > 0$,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} f(x) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} x^{a-\frac{1}{2}}$$

Ensuite, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Weyl, Riez, Marchaud et Caputo, entre autres, ont contribué au développement du calcul fractionnaire dans lequel on définit les dérivées et intégrales non entières.

Dans ce cadre et pour notre support bibliographique nous nous sommes appuyés principalement sur les ouvrages de Samko, Kilbas et Marichev , celui de Rubin ainsi que Kilbas, Srivastava et Trujillo. Les équations différentielles fractionnaires (EDF) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médicine, l'électrochimie, la théorie du contrôle, etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

Les études sur l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles fractionnaires sont très abondantes, entre autres les travaux citer Zhang et Benchohra . On propose dans ce travail, de faire une synthèse de certains travaux sur l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire.
Le mémoire se compose de deux chapitres qui s'articulent de la façon suivante :
Le premier chapitre est consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : l'intégration fractionnaire, la dérivation fractionnaire au sense de Riemann-Liouville, Caputo et Katugampola On présentera quelques unes de leurs propriétés et on précisera aussi la relation entre ces trois approches, qui sont les plus utilisées.

Dans le seconde chapitre, il y a trois sections telle que :

1. Dans premier section considérer un problème étudiée par S. Zhang. c'est l'équation différentielle fractionnaire non linéaire de type Riemann-Liouville suivante :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0^+} u(t) + f(t, u(t)) = 0, \qquad t \in [0,1],\ 3 < \alpha \leq 4 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

2. Dans le seconde section on abordera la question d'existence et d'unicité de la solution pour le problème de Cauchy et le problème aux limites pour l'équations différentielle d'ordre fractionnaire de type Caputo suivant :
I)

$$\begin{cases} {}^{C}Dy(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

II).

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c \end{cases}, \tag{3}$$

3. Dans la derniére section nous avons discuté de l'existence et du caractère unique des solutions. pour une classe d'équations différentielles fractionnaires implicites non linéaires suivant :

$$\begin{cases} {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u\,(t) = f\left(t, u\,(t)\,, {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u\,(t)\right), \qquad t \in [0, T]. \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

L'existence et l'unicité d'une solution continue de tous les problèmes est établit par la transformation de ce problème à une équation intégrale équivalente, dont la solution est identifiée à un point fixe d'un opérateur contractant (sous certaines hypothèses suffisantes sur la fonction f) dans un espace fonctionnel convenablement choisi.

Chapitre 1

Définitions et notions de base

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire, telles que : les fonctions spéciales (Gamma, Beta, Mittag-Leffler), l'intégration fractionnaire de Riemann Liouville et de Katugampola, la dérivation fractionnaire au sense Riemann-Liouville, Caputo, Katugampola, qui sont les plus utilisées, Lemmes Fondamentaux et théorèmes de point fixe.

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1.1. *On appelle fonction Gamma, la fonction défine par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (x \in \mathbb{C}, \quad Re(x) > 0)$$

avec $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$.

Exemple 1.1.1.

1. $$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

2. $$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \sqrt{\pi}$$

$$(\textit{posant le changement de variable } t = \frac{1}{2}s^2)$$

Lemme 1.1.1. *[8],[9] La fonction Gamma est une fonction de classe* C^{∞} *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *(resp holomorphe sur le demi plan* $x \in \mathbb{C}, Re(x) > 0$*) et,*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ (resp, x \in \mathbb{C}, \ Re(x) > 0), \ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$$

Proposition 1.1.1. *[8],[9] Pour tout $x \in \mathbb{C},\ Re(x) > 0,\ n \in \mathbb{N}$, on a :*

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2. $\Gamma(n+1) = (n)!$
3. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$

Preuve.

1.

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

2. il suffit d'appliquons 1 pour $x = n$

3.

$$\begin{aligned}\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\Gamma(n-\frac{3}{2}) \\ &= (\frac{2n-1}{2})(\frac{2n-3}{2})(\frac{2n-5}{2})...\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)...(1)}{2^n(2n)(2n-2)(2n-4)...(2)}\Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}\end{aligned}$$

■

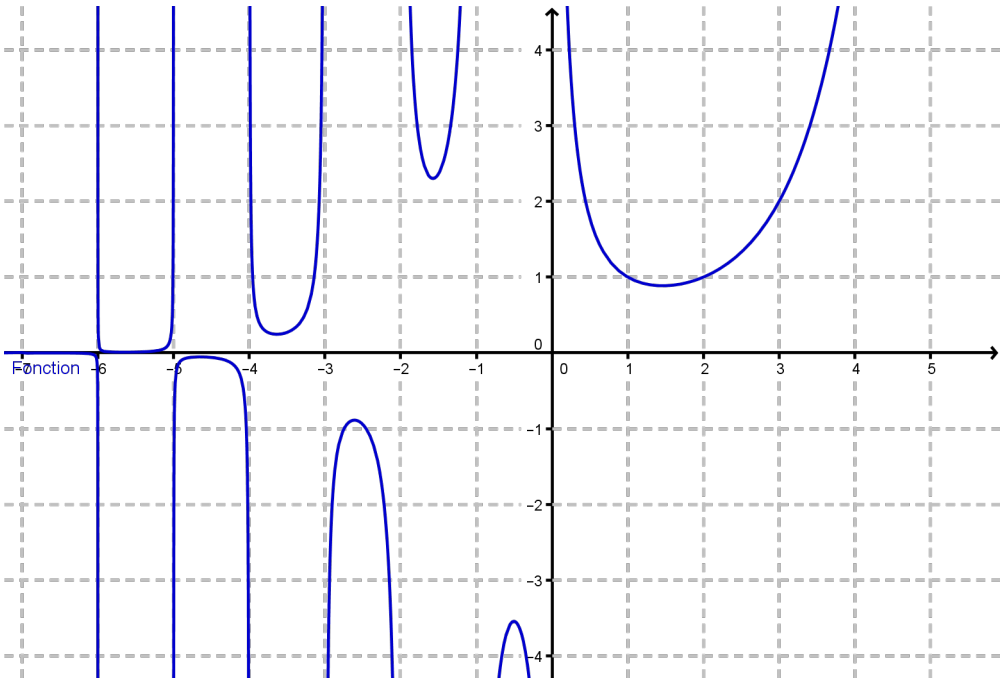
Remarque 1.1.1. *[8],[9] La détermination de la fonction Gamma pour les valeurs négatifs non entières par la formule $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, la fonction Gamma n'existe pas pour les valeurs négatifs entières.*

Exemple 1.1.2.

1.
$$\Gamma(\frac{-1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{-1}{2}+1)}{\frac{-1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{-1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

2.
$$\Gamma(\frac{-3}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{-3}{2}+1)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{-1}{2})}{\frac{-3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{\frac{-3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

$*$ Le graphe de la fonction Gamma Γ :



Proposition 1.1.2. *[8],[9] Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $Re(z) > 0$ *, on a :*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots\dots(z+n)}$$

Preuve. Considérons la fonction,

$$f(n,z) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx$$

on peut facilement voir que :

$$\lim_{n\to+\infty} f(n,z) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx = \Gamma(z)$$

D'une autre part, par l'intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned} f(n,z) &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1} dx = \left[(1 - \frac{x}{n})^n \frac{x^z}{z}\right]_0^n + \frac{1}{z}\int_0^n (1 - \frac{x}{n})^{n-1} x^z dx \\ &= \frac{1}{z}\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^z dx. \end{aligned}$$

Après l'intégration par parties autre fois, on obtient :

$$\begin{aligned} f(n,z) &= \frac{1}{z}\left[\left[(1 - \frac{x}{n})^{n-1} \frac{x^{z+1}}{z+1}\right]_0^n + \frac{n-1}{n(z+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{z+1} dx\right] \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2 z(z+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{z+1} dx. \end{aligned}$$

Après l'intégration par parties n fois, on obtient :

$$\begin{aligned} f(n,z) &= \frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n^n z(z+1)\cdots[z+(n-1)]}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-n} x^{z+(n-1)}dx \\ &= \frac{n!}{n^n z(z+1)\cdots[z+(n-1)]}\left[\frac{x^{n+z}}{n+z}\right]_0^n \\ &= \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots\cdots(z+n)}.$$

■

1.1.2 Fonction Beta d'Euler

Définition 1.1.2. *La fonction Beta est un type d'intégrale d'Euler définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad (p,q \in \mathbb{C}, Re(p) > 0, Re(q) > 0)$$

Proposition 1.1.3. *on a :*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Preuve. Soit $D = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy\right) \\ &= \int\int_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy \end{aligned}$$

en utilisant un changement de cordonnées, considérons les nouvelles cordonnées

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases},$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u\ ,$$

de *même* que le domaine D' correspondant à D dans les cordonnées u, v est

$$D' = \{(u,v)\ /u \geq 0,\ 0 \leq v \leq 1\}.$$

alors :

$$\begin{aligned}\int\int_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy &= \int\int_{D'}(uv)^{p-1}\left[u(1-v)\right]^{q-1}e^{-u}|-u|dudv\\ &= \int\int_{D'}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}e^{-u}dudv\\ &= \left(\int_0^{+\infty}u^{p+q-1}e^{-u}du\right)\left(\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\right)\\ &= \Gamma(p+q)B(p,q),\end{aligned}$$

par conséquent on a :

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

■

1.1.3 Fonction de Mittag-Leffter

Définition 1.1.3. *La fonction simple de Mittage-Leffter est définie par :*

$$E_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\ \alpha>0.$$

et la fonction de Mittage-Leffter généralisée est définie par :

$$E_{\alpha,\ \beta}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\quad \alpha,\ \beta>0.$$

Exemple 1.1.3.

1.

$$E_1=E_{1,1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x.$$

2.

$$E_2=E_{2,1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(2k)!}=\cosh\sqrt{x}.$$

3.

$$E_{1,2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(k+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{1}{x}(e^x-1).$$

4.

$$E_{1,3}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(k+2)!}=\frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{1}{x^2}(e^x-1-x).$$

Théorème 1.1.1. *[8],[9] Pour tout $\alpha=n\in\mathbb{N},\ \lambda\in\mathbb{R}$ on a :*

$$\begin{aligned}(\frac{d}{dx})^nE_n(\lambda x^n) &= \lambda E_n(\lambda x^n).\\ (\frac{d}{dx})^n x^{\beta-1}E_{n,\beta}(\lambda x^n) &= \lambda x^{\beta-n-1}E_n(\lambda x^n).\end{aligned}$$

1.2 Intégrale fractionnaire

1.2.1 Intégrale de Riemann-Liouville

Fonctions définies sur $C[a,b]$

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a,b]$. Notons par $(I^1_{\alpha^+} f)$ la primitive de f qui s'annule en a :

$$\forall t \in [a,b],\ (I^1_{a^+} f)(t) = \int_a^t f(x)dx$$

L'intégration de $(I^1_{a^+} f)$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a. De plus, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}(I^1_{a^+} f)^2(t) &= (I^1_{a^+} f) o (I^1_{a^+} f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^u f(x)dx \right) du \\ &= \int_a^t (t-x) f(x)dx.\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, En notant $(I^1_{a^+} f)^n$ la n-ième itération de $(I^1_{a^+} f)$, une récurrence directe montre que

$$(I^1_{a^+} f)^n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx$$

si on note $g = (I^1_{a^+} f)^n,\ g$ est donc l'unique fonction vérifiant,

$$\forall\ 0 \leq k \leq n-1,\ g^{(k)}(a) = 0,\ g^{(n)} = f.$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante :

Définition 1.2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, L'intégrale à gauche d'ordre n de f, que l'on note $(I^n_{a^+} f)$ est définie par :*

$$(I^n_{a^+} f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx.$$

Grâce à la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment.
C'est la propriété $\Gamma(n+1) = n!,\ \forall n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition 1.2.1 de la manière suivante :

Définition 1.2.2. *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$, est définie par :*

$$\forall t \in [a,b],\ (I^\alpha_{a^+} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)dx$$

De même manière on définit l'integrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$, par :

$$\forall t \in [a,b],\ (I^a_{b^-} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} f(x)dx.$$

Fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$

Il est naturel d'étendre la définition 1.2.2 aux axes $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$, Notons ces opérateurs $(I^{\alpha}_{0^+}f)$ et $(I^{\alpha}_{+}f)$:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^+,\ (I^{\alpha}_{0^+}f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}f(x)dx \\ \forall t \in \mathbb{R},\ (I^{\alpha}_{+}f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^t (t-x)^{\alpha-1}f(x)dx \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1. *[8],[9] Pour $\alpha > 0,\ \beta > 0$, on a :*

1.
$$(I^{\alpha}_{\alpha^+}(t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-\alpha)^{\alpha+\beta-1}$$

2.
$$(I^{\alpha}_{b^-}(b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-t)^{\alpha+\beta-1}$$

Preuve.

1.
$$\begin{aligned} (I^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta-1})(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(x-a)^{\beta-1}dx,\ \textit{posons}\ (x-a) = s(t-a) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 ((t-a)-s(t-a))^{\alpha-1}(s(t-a))^{\beta-1}(t-a)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta),\ B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

2. Même idée le changement de variable est $(b-x) = s(b-t)$.

■

Théorème 1.2.1. *[8],[9] Si $f \in L^1([a,b])$, alors $I^{\alpha}_{a^+}f$ existe pour tout $\alpha > 0$, et $I^{\alpha}_{a^+}f \in L^1([a,b])$.*

Proposition 1.2.2. *[8],[9] Soit $\alpha > 0,\ \beta > 0$, et $f \in L^1([a,b])$.*
Alors

$$I^{\alpha}_{a^+}I^{\beta}_{a^+}f = I^{\alpha+\beta}_{a^+}f$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} (\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\beta-1} f(s) ds) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^x (t-x)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1} f(s) ds dx, \left| \begin{array}{c} \text{changement de l'ordre} \\ \text{d'intégration} \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) \int_s^t (t-x)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1} dx ds, \left| \begin{array}{c} x = (t-s)u + s, u : 0 \to 1 \\ u = \frac{x-s}{t-s},\ du = \frac{dx}{t-s} \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du ds, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta) ds,\ (B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) \\
&= I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t).
\end{aligned}$$

■

1.2.2 Intégrale de Katugampola

nous prèsentons une généralisation rècente introduite par Udita Katugampola (2011) [7], qui généralise l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et l'intégrale fractionnaire de Hadamard. l' intégral est maintenant aussi connue sous le nom d'intégrale fractionnaire de Katugampola et donnée par

Définition 1.2.3. *(Katugampola) L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $y \in X_c^p[0,T]$ est définie par :*

$$({}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y)(t) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{s^{\rho-1} y(s)}{(t^{\rho} - s^{\rho})^{1-\alpha}} ds, \qquad t \in [0,T].$$

pour $\rho > 0$. Cette intégrale est appelée l'intégrale du côté gauche.

De même façons on peut définir l'intégrale du côté droit [7]-[6].

Remarque 1.2.1. *Considérons l'espace $X_c^p[0,T]$ $(c \in \mathbb{R}, 1 \le p \le \infty)$ des fonctions mesurables y sur $[0,T]$ pour $\|y\|_{X_c^p} < \infty$, où la norme défini par :*

$$\|y\|_{X_c^p} = \left(\int_0^T |s^c y(s)|^p \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{p}}$$

et pour le cas $p = \infty$

$$\|y\|_{X_c^\infty} = \boldsymbol{ess}\sup_{0\le t\le T}\left[t^c\left|y\left(t\right)\right|\right].$$

Théorème 1.2.2. *[7] Soient* $\alpha > 0$ *et* $\rho > 0$. $t \in [0, T]$ *Alors*

$$\lim_{\rho\longrightarrow 1}\left({}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}y\right)(t) = \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}y\right)(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, y(s)ds,$$

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0}\left({}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}y\right)(t) = \left(\mathcal{J}_{\alpha^+}^{\alpha}y\right)(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{y(s)}{s}ds.$$

1.3 Dérivées fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, on va commencer par introduire les trois plus importantes approches de calcul fractionnaire : au sens de Riemann-Liouville , au sens de Caputo et au sens de Katugampola . On présentera quelques une de leurs propriétés .

1.3.1 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α :$[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant $[\alpha] \le \alpha < [\alpha] + 1$, soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ I_t^1$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \le \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} \circ I_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, on peut poser :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ I_t^{n-\alpha}.$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 1.3.1. *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$*, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre* α *est définie par :*

$$\begin{aligned}\forall t \in [a, b],\ D_{a^+}^{\alpha} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_{a^+}^{n-\alpha} f(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x)dx.\end{aligned}$$

De plus, on a vu que la définition 1.3.1, d'intégrale à droite était associée à $-d/dt$. le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 1.3.2. *Soit $\alpha > 0$, et $n = [a] + 1$. la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b], D^{\alpha}_{b^-} f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ I^{n-\alpha}_{b^-} f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (x-t)^{n-\alpha-1} f(x) dx \end{aligned}$$

Soit maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Liouville.

Définition 1.3.3. *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ D^{\alpha}_{+} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I^{n-\alpha}_{+} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx \end{aligned}$$

De plus, on a vu que le définition 1.3.3, d'intégrale à droit était associée à $-d/dt$. le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 1.3.4. *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. la dérivée fractionnaire de Liouville à droite d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ D^{\alpha}_{-} f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ I^{n-\alpha}_{-} f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (x-t)^{n-\alpha-1} f(x) dx. \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1. *[10]*

1. *Pour $\alpha = 0,\ n = 1$, on a $D^0_{a^+} f(t) = \frac{d}{dt}(I^1_{a^+} f)(t) = f(t)$*
2. *Toutes ces dérivées coincident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} D^n_{\alpha^+} f(t) = D^n_{+} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ \\ D^n_{b^-} f(t) = D^n_{-} f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \end{cases}$$

Proposition 1.3.1. *[8],[9] Pour $\alpha \geq 0,\ \beta > 0$, on a :*

1. $$\left(D^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

2.

$$\left(D^{\alpha}_{b^-}(b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}.$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = (t-\alpha)^{\beta-1}$, d'après la définition 1.3.1, et proposition 1.2.1, on a :

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{a^+}f)(t) &= (\frac{d}{dt})^n \circ I^{n-\alpha}_{a^+}f(t)\\ &= (\frac{d}{dt})^n\left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(t-a)^{n-\alpha+\beta-1}\right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)^n(t-a)^{n-\alpha+\beta-1} &= (n-\alpha+\beta-1)\cdots(n-\alpha+\beta-1-(n-1))(t-a)^{-\alpha+\beta-1}\\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\cdots(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1},\end{aligned}$$

et d'autre coté :

$$\begin{aligned}\Gamma(n-\alpha+\beta) &= (n-\alpha+\beta-1)\Gamma(n-\alpha+\beta-1),\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\Gamma(n-\alpha+\beta-2)\\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\cdots(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{a^+}f)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\cdots(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1}\\ &= \frac{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\cdots(\beta-\alpha)\Gamma(\beta)}{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\cdots(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}\\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}.\end{aligned}$$

2. De même manière .

■

Remarque 1.3.2. *[8],[9] Pour $\lambda = \beta-1,\ a=0$ on a :*

$$\begin{aligned}\left(D^{\alpha}_{0^+}t^{\lambda}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)}(n-\alpha+\lambda)(n-\alpha+\lambda-1)....(\lambda+1-\alpha)t^{\lambda-\alpha}\\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)}(n-(\alpha-\lambda))(n-1-(\alpha-\lambda))....(1-(\alpha-\lambda))t^{\lambda-\alpha},\end{aligned}$$

$$(D_{0^+}^{\alpha}t^{\lambda})(t)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha}, \ si \ \ \alpha-\lambda\notin\{1,2,.....,n\}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\lambda>-1\\ 0, \qquad\qquad si \ \ \alpha-\lambda\in\{1,2,.....,n\}\end{cases}$$

$$Si\ \alpha-\lambda\in\{1,2,\cdots,n\}\Rightarrow\alpha-\lambda=m\Rightarrow\lambda=\alpha-m,\ m\in\{1,2,...,n\}\ C\text{-}\grave{a}\text{-}d$$

$$(D_{0^+}^{\alpha}t^{\alpha-m})(t)=0,\ m\in\{1,2,....,n\}.$$

Proposition 1.3.2. *[8],[9] Soit $\alpha>0$, $\beta>0$, $n=[\alpha]+1$, on a les propriétés suivantes :*

1. *Si $f(t)\in L_p([a,b]),\ (1\leq p<\infty)$, alors*

$$(D_{a^+}^{\alpha}I_{a^+}^{\alpha}f)(t)=f(t),\ et(D_{b^-}^{\alpha}I_{b^-}^{\alpha}f)(t)=f(t).$$

2. *Si $\alpha>\beta,\ etf(t)\in L_p([a,b]),\ (1\leq\alpha<\infty)$, alors*

$$(D_{a^+}^{\beta}I_{a^+}^{\alpha}f)(t)=(I_{a^+}^{\alpha-\beta}f)(t),\ et(D_{b^-}^{\beta}I_{b^-}^{\alpha}f)(t)=(I_{b^-}^{\alpha-\beta}f)(t),$$

3. *Si $f(t)\in C^q([a,b]),\ q=[\alpha+\beta]+1$, alors*

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}D_{a^+}^{\beta}f\right)(t)=\left(D_{a^+}^{\alpha+\beta}f\right)(t),\ et\left(D_{b^-}^{\alpha}D_{b^-}^{\beta}f\right)(t)=\left(D_{b^-}^{\alpha+\beta}f\right)(t),$$

4. *Si $f(t)\in L_1([a,b]),\ (I_{a^+}^{n-\alpha}f)\in AC^n([a,b]),$ alors*

$$\begin{aligned}(I_{a^+}^{\alpha}D_{a^+}^{\alpha}f)(t) &= f(t)-\sum_{K=1}^{n}\frac{(I_{a^+}^{n-\alpha}f)^{(n-K)}(a)}{\Gamma(\alpha-K+1)}(t-a)^K\\ (I_{b^-}^{\alpha}D_{b^-}^{\alpha}f)(t) &= f(t)-\sum_{K=1}^{n}\frac{(-1)^{n-K}(I_{b^-}^{n-\alpha}f)^{(n-K)}(b)}{\Gamma(\alpha-K+1)}(b-t)^K.\end{aligned}$$

1.3.2 Dérivées fractionnaires de Caputo

Cette définition se base sur l'interversion des compositions dans la formule de définition 1.3.1, semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire appelée dérivée de Caputo .

Définition 1.3.5. *Soit $\alpha>0$, et $n=[\alpha]+1$, la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned}\forall t\in[a,b],\quad {}^{C}D_{a^+}^{\alpha}f(t) &= I_{a^+}^{n-\alpha}\circ\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-x)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(x)dx,\end{aligned}$$

Définition aussi son analogue à droite.

Définition 1.3.6. *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$ la dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b], \quad {}^{C}D^{\alpha}_{b^-} f(t) &= I^{n-\alpha}_{b^-} \circ \left(-\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx. \end{aligned}$$

Remarque 1.3.3. *[10] Par contre, de telles définition ne recollent pas correctement aux dérivées classique :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} {}^{C}D^{n}_{a^+} f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \\ \\ {}^{C}D^{n}_{b^-} f(t) = (-1)^n (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(b)) \end{cases}$$

Heureusement, le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classiques par limite inférieure.

Remarque 1.3.4.
1) *On note $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$*
$f \in AC([a,b]) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a,b])$ telle que $f = c + \int_a^x \varphi(t)dt$.
2) *On note $AC^n([a,b])$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace des fonctions f définies sur$[a,b]$ a valeurs dans C qui ont des dérivèes continues sur $[a,b]$ jusqu'a l'ordre $n-1$ donc :*
$AC^n([a,b]) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} : f^{(k)} \in C([a,b]),\ k = 0...n-1,\ f^{(n-1)} \in AC([a,b]) \right\}$.

Lemme 1.3.1. *[8],[9] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+/\mathbb{N}$, et $n = [\alpha] + 1$. si $f \in AC^n([a,b])$, alors presque partout :*

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \to n^-} {}^{C}D^{\alpha}_{a^+} f(t) &= f^{(n)}(t) \\ \lim_{\alpha \to n^-} {}^{C}D^{\alpha}_{b^-} f(t) &= (-1)^n f^{(n)}(t) \end{aligned}$$

Proposition 1.3.3. *[8],[9] Pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, on a :*

1. $$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a^+} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1},\ \beta > n$$

2. $$\left({}^{C}D^{\alpha}_{b^-} (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1},\ \beta > n$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, d'apres la défintion de $({}^{C}D)$ on a :

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a^+}f)(t) = I^{n-\alpha}_{a^+} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x)dx$$

et

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta-1} &= (\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-1-(n-1))(t-a)^{\beta-1-n} \\ &= (\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-n)(t-a)^{\beta-n-1}\end{aligned}$$

d'où

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a^+}f)(t) = \frac{(\beta-1)(\beta-2)..(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1}(x-a)^{\beta-n-1}dx,$$

on suppose que $(x-a) = s(t-a)$,
Alors on a :

$$\begin{aligned}({}^{C}D^{\alpha}_{a^+}f)(t) &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)..(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1}(x-a)^{\beta-n-1}dx \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n-1}ds \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}B(n-\alpha,\beta-n) \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}\end{aligned}$$

2. De même manière.

■

Remarque 1.3.5. *[8],[9] Pour $\lambda = \beta - 1,\ a = 0$ on a :*

$${}^{C}D^{\alpha}_{0^+}t^{\lambda} = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-(n-1))\Gamma(\lambda-(n-1))}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha}$$

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{0^+}t^{\lambda}\right)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha}, & si,\ \lambda \notin \{0,1,2,.....n-1\} \\ \\ 0 & si,\ \lambda \in \{0,1,2,.....n-1\} \end{cases}, \lambda > -1$$

C-à-d

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{0^+}t^{m}\right)(t) = 0, \quad m \in \{0,1,2,.....,n-1\}$$

Théorème 1.3.1. *[10] Soit $\alpha \geq 0$, et $n = [\alpha] + 1$. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, possède $(n-1)$ dérivées en (a) et $(D^{\alpha}_{a^+} f)$ existe. Alors*

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a^+} f\right)(t) = D^{\alpha}_{a^+}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]$$

Pour tout $t \in [a, b]$.

Preuve. Par définition on a :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I^{n-\alpha}_{a^+}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{(t-x)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] dx, \end{aligned}$$

En utilisant l'intègration par partie on a :

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad &\to \quad \frac{d}{dx}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \\ \frac{(t-x)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \quad &\to \quad -\frac{(t-x)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} I^{n-\alpha}_{a^+}[g(t)] &= \int_a^t \frac{(t-x)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] dx \\ &= \left[\frac{-(t-x)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-a+1)} g(x)\right]_{\alpha}^{t} + \int_a^t \frac{(t-x)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{d}{dx} g(x) dx, \end{aligned}$$

d'où

$$I^{n-\alpha}_{a^+}[g(t)] = I^{n-a+1}_{a^+} \frac{d}{dt} g(t)$$

De même façon pour n -fois,

$$\begin{aligned} I^{n-\alpha}_{a^+}[g(t)] &= I^{n-\alpha+n}_{a^+} \frac{d^n}{dt^n} g(t) \\ &= I^{n}_{a^+} I^{n-\alpha}_{a^+} \frac{d^n}{dt^n} g(t) \\ &= I^{n}_{\alpha^+} I^{n-\alpha}_{\alpha^+} \frac{d^n}{dt^n}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] \\ &= I^{n}_{a^+} I^{n-\alpha}_{a^+} \frac{d^n}{dt^n} f(t), \ \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] = 0, \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a^+}^{n-\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a^+}^{n-\alpha}[g(t)] \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a^+}^{n}I_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f(t) \\ &= I_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f(t) \\ &= \left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha}f\right)(t). \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.3.1. *[10] Soit $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha]+1$ et $(D_{a^+}^{\alpha}f)$, $({}^{C}D_{a^+}^{\alpha}f)(t)$ sont existent, on suppose que $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, .., n-1$. Alors :*

$$({}^{C}D_{a^+}^{\alpha}f)(t) = (D_{a^+}^{\alpha}f)(t).$$

Proposition 1.3.4. *[8],[9] Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n = [\alpha]+1$, on a les propriétés suivantes :*

1. *Si $f(t) \in C^q([a,b])$, $q = [\alpha+\beta]+1$, alors :*

$$\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha}\ {}^{C}D_{a^+}^{\beta}f\right)(t) = \left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha+\beta}f\right)(t),$$

et

$$\left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha}\ {}^{C}D_{b^-}^{\beta}f\right)(t) = \left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha+\beta}f\right)(t),$$

2. *Si $f(t) \in C^n([a,b])$, ou $f(t) \in AC^n([a,b])$, alors :*

$$\begin{aligned} \left(I_{a^+}^{\alpha}\ {}^{C}D_{a^+}^{\alpha}f\right)(t) &= f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k, \\ \left(I_{b^-}^{\alpha}\ {}^{C}D_{b^-}^{\alpha}f\right)(t) &= f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k. \end{aligned}$$

1.3.3 Dérivées fractionnaires de Katugampola

Définition 1.3.7 (*Katugampola* fractionnaire dérivés [6])**.**
Soit $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$ telle que $\alpha > 0$, $\rho > 0$, et $n = [\alpha]+1$. la dérivée fractionnaire de Katugampola, pour $0 \leq t \leq T \leq \infty$, est définie par :

$${}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}y(t) = \left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n \circ \left({}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}y\right)(t) = \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t \frac{s^{\rho-1}y(s)}{(t^{\rho}-s^{\rho})^{\alpha-n+1}}ds.$$

Remarque 1.3.6 ([7]-[6]). *Un exemple de base , nous citons pour* $\alpha, \rho > 0$, *et* $\mu > -\rho$, *alors :*

$$ {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\mu} = \frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(1+\frac{\mu}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right)} t^{\mu-\alpha\rho}. $$

donne en particulier ${}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\rho(\alpha-m)} = 0$, *pour tout* $m = 1, 2, \ldots, n$.

En fait, pour $\alpha, \rho > 0$, et $\mu > -\rho$, nous avons :

$$ \begin{array}{rl} {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\mu} & = \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t s^{\rho+\mu-1}\left(t^{\rho}-s^{\rho}\right)^{n-\alpha-1} ds \\ & = \frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(1+\frac{\mu}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1+n-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right)} \left[n-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right]\left[n-\alpha+\frac{\mu}{\rho}-1\right]\cdots\left[1-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right] t^{\mu-\alpha\rho} \\ & = \frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(1+\frac{\mu}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\mu}{\rho}\right)} t^{\mu-\alpha\rho}. \end{array} \tag{1.1} $$

Si on met $m = \alpha - \frac{\mu}{\rho}$, on obtient de (1.1) :

$$ {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\rho(\alpha-m)} = \rho^{\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha-m+1)}{\Gamma(n-m+1)}(n-m)(n-m-1)\cdots(1-m)\, t^{-\rho m}. $$

Donc, pour $m = 1, 2, \ldots, n$, nous avons ${}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\rho(\alpha-m)} = 0$, $\forall \alpha, \rho > 0$.
$C[0,T]$ désignons l'espace Banach de tout les fonctions continues sur $[0,T]$

$$ \|y\|_{\infty} = \sup\{|y(t)| : 0 \le t \le T\}. $$

Remarque 1.3.7. *Soit* $p, c, T \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $p \ge 1$, $c > 0$, *et* $T \le (pc)^{\frac{1}{pc}}$.
il est clair que, $\forall y \in C[0,T]$

$$ \|y\|_{X_c^p} = \left(\int_0^T |s^c y(s)|^p \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{T^c}{(pc)^{\frac{1}{p}}} \|y\|_{\infty}, $$

et

$$ \|y\|_{X_c^{\infty}} = \boldsymbol{ess}\sup_{0\le t\le T}\left[t^c |y(t)|\right] \le T^c \|y\|_{\infty}. $$

Ce qui implique que $C[0,T] \hookrightarrow X_c^p[0,T]$, *et :*

$$ \|y\|_{X_c^p} \le \|y\|_{\infty} \ \textit{pour tous} \ \ T \le (pc)^{\frac{1}{pc}}. $$

Théorème 1.3.2 ([7]-[6]).
Soit $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$, *tels que* $\alpha \in (0,1)$, *et* $\rho > 0$, *alors pour* $f, g \in X_c^p[0,T]$, *où* $1 \le p \le \infty$, *on a :*
- Propriété Inverse

$$ {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\ {}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f(t) = f(t). \tag{1.2} $$

- Propriété de linéarité

$$ \begin{array}{rcl} {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}(f+g)(t) & = & {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} f(t) + {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} g(t), \\ {}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}(f+g)(t) & = & {}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f(t) + {}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} g(t). \end{array} \tag{1.3} $$

1.4 Théorèmes de point fixe

Dans cette section on a destiné aux différents outils et résultats de la théorie de l'analyse fonctionnelle utilisés par la suite : principe de contraction de Banach, équicontinuité, théorème de Schauder, théorème d'Arzela-Ascoli,...

Définition 1.4.1. *Soit X un espace de Banach. On dit que F est contractant $\Rightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in X$, on a :*

$$|F(x_1) - F(x_2)| < k\,|x_1 - x_2|\,, \qquad 0 < k < 1$$

Théorème 1.4.1. *[4]* ***Banach***
Soit X un espace de Banach, et soit l'opérateur $F : X \to X$ est contractant Alors : F admet un point fixe unique, ***i-e***

$$\exists y^* \in X \;\; tell\ que \;\; F(y^*) = y^*$$

Définition 1.4.2. *On dit que, A est convexe si*

$$\forall x, y \in A,\ \forall t \in [0,1] \quad : tx + (1-t)y \in A$$

Théorème 1.4.2. *[1]* ***Schauder***
Soit (E, d) un espace métrique complet et A une partie convexe fermée de E et soit $F : A \to A$, on a si l'ensemble $\{Fx : x \in A\}$ relativement compact dans E. Alors F possède au moins un point fixe.

Théorème 1.4.3. *[4]* ***Schaefer***
Soit X un espace de Banach et $F : X \to X$ un opérateur complètement continu. Alors F possède au moins un point fixe.

i) $\forall b \subset X \Rightarrow F(b)$ est relativement compacte,

ii) si l'ensemble $P = \{y \in X : \lambda F(y) = y, \quad \lambda \in]0,1[\}$ est borné.

Théorème 1.4.4. *[4]* ***type non linéaire de alternative de Leray-Schauder***
Soit E un espace de Banach avec $P \in E$ un espace fermé et convexe. Assumer U est un sous-ensemble relativement overt de P avec $0 \in U$ et $\mathcal{A} : \overline{U} \to P$ est une carte compacte. Alors soit

I) *$\mathcal{A}$ admet un point fixe en $\overline{U}$. ou*

II) *Il y a une point $u \in \partial U$ et $\mu \in (0,1)$ avec $u = \mu\mathcal{A}(u)$.*

Théorème 1.4.5. *[4]* ***Ascoli-Arzelà***
Soit l'ensemble F de $C(X, Y)$ (espace de Banach). On dit que F est relativement compact dans $C(X, Y)$ si et seulement si :

i) F est borné donc $\exists k > 0$ *telle que :*

$$\|f(x)\| \leq k \quad \forall x \in X \text{ et } f \in F,$$

ii) F est équicontinue ***C-à-d*** $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tell que :*

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in X \text{ et } f \in F.$$

Lemme 1.4.1. *[4]* ***Granwall***
Soit $u(t)$ *et* $g(t)$ *deux fonctions continues non négatives, sur* $0 \leq t \leq T$. *pour ce que l'inégalité*

$$u(t) \leq \mu + \int_0^t g(s)u(s)ds \qquad 0 \leq t \leq T$$

verifiée, où μ *est une constante non négative. Alors*

$$u(t) \leq \mu exp(\int_0^t g(s)ds) \qquad 0 \leq t \leq T$$

Théorème 1.4.6. ***Kranoselskii***
Soit F un ensemble non vide, fermé, et convexe d'un espace de Banach X. T_1 *et* T_2 *sont deux applications de F dans X tels que :*
1. $T_1(x) + T_2(y) \in F, \forall x, y \in F$
2.T_1 *est une contraction*
3.T_2 *est compacte et continue*
Alors , $T_1 + T_2$ *admet un point fixe dans F, autrement dit, il existe* $x \in F$ *tel que* $T_1(x) + T_2(x) = x$.

Chapitre 2

Résultat d'Existence de la solution des Équations Différentielles d'ordre Fractionnaire

2.1 Equations Différentielles Fractionnaires de type Riemann-Liouville

Dans cette section on s'intéresse au problème non linéaire fractionnaire étudié par S.Zhang dans [15]

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0^+}u(t) + f(t,u(t)) = 0 \qquad 0 < t < 1,\ 3 < \alpha \leq 4 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f \in C([0,1]\times[0,\infty[)$, et $D^{\alpha}_{0^+}$ est l'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre α au sense de Riemann-Liouville.
L'existence des solutions positives du problème est basé sur la méthode de sup-solutions et inf-solutions, fondée sur l'un des théorèmes de point fixe.

2.1.1 Lemmes Fondamentaux

On a les lemmes fondamentaux suivants :

Lemme 2.1.1. *[15] Soit $\alpha > 0$, donc l'équation différentialle de type Riemann-Liouville :*

$$D^{\alpha}u(t) = 0, \qquad 0 < t < 1$$

admet la solution suivante :

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots\cdots + c_n t^{\alpha-n}$$

tel que : $c_i \in \mathbb{R},\ \ i = 1, 2, 3, \cdots, n,\ n = [\alpha] + 1$

Lemme 2.1.2. *On pose*

$$u \in C(0,1) \cap L(0,1), \quad D^{\alpha} u \in C(0,1) \cap L(0,1)$$

Alors

$$I^{\alpha} D^{\alpha} u(t) = u(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots + c_n t^{\alpha-n}$$

$c_i \in \mathbb{R},\ \ i = 1, 2, 3, \cdots, n \qquad n = [\alpha] + 1$

Preuve. *Soit $\alpha > 0$, et soit $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$, on a :*

$$\begin{aligned} I^{\alpha} D^{\alpha} u(t) &= u(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(I^{n-\alpha} u^{(n-k)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} t^{\alpha-k} \\ &= u(t) - \left[\frac{\left(I^{n-\alpha} u^{(n-1)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{\left(I^{n-\alpha} u^{(n-2)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha-1)} t^{\alpha-2} \cdots + \frac{\left(I^{n-\alpha} u\right)(0)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} t^{\alpha-n} \right] \end{aligned}$$

on pose $c_i = -\frac{\left(I^{n-\alpha} u^{(n-i)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha-i+1)} \in \mathbb{R},\ \ \forall i = 1, 2, \cdots, n, \quad$ *de trouve l'égalité.*

■

Lemme 2.1.3. *[15] Si $y(t) \in C[0,1]$, et $y(t) \geq 0$, le problème :*

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0^+} u(t) + y(t) = 0 \qquad 0 < t < 1,\ 3 < \alpha \leq 4 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

admet une solution unique suivante :

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) y(s) ds$$

où

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-3} - (t-s)^{\alpha-1} & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-3} & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Preuve. *On utilise la définition de la dérivée de Riemann-Liouville et le lemme 2.1.2, on a :*

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} + c_4 t^{\alpha-4} - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s) ds$$

D'après la condition initiale, on a :

$$c_2 = c_3 = c_4 = 0, \quad et \quad c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} y(s) ds$$

alors la solution du problème (2.2) *s'écrire sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)} y(s) ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s) ds \\ &= \int_0^t \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)} y(s) ds + \int_t^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)} y(s) ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s) ds \\ &= \int_0^1 G(t,s) y(s) ds. \end{aligned}$$

alors, on a $u(t) \geq 0$, *si* $y(t) \geq 0$, *dans* $t \in [0,1]$.

■

Lemme 2.1.4. *[15] Si* $u(t) \in C^2[0,1]$ *est positive, la solution de problème* (2.1) *est*

$$m\rho(t) \leq u(t) \leq M\rho(t)$$

où

$$\rho(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-2} - \frac{1}{\alpha} t^{\alpha} \right)$$

et m, M *sont deux constantes .*

Preuve. *On a* $u(t) \in C^2[0,1]$, *alors il existe* $M' > 0$, *telle que* $|u(t)| \leq M'$, *pour tout* $t \in [0,1]$ *et on prend :*

$$m = \min_{(t,u) \in [0,1] \times [0,M']} f(t, u(t)), \ et \ M = \max_{(t,u) \in [0,1] \times [0,M']} f(t, u(t)),$$

donc par lemme 2.1.3, on a :

$$\begin{aligned} m \int_0^1 G(t,s) ds &\leq u(t) \\ &= \int_0^1 G(t,s) f(s, u(s)) ds \\ &\leq M \int_0^1 G(t,s) ds \end{aligned}$$

alors on déduit que :

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \int_0^1 G(t,s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[t^{\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[t^{\alpha-1} (\frac{1}{\alpha-2}) + \frac{1}{\alpha} (-t^{\alpha}) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-2} - \frac{1}{\alpha} t^{\alpha}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$m\rho(t) \leq u(t) \leq M\rho(t).$$

■

Définition 2.1.1. *[15] Soit une fonction* $\beta(t) \in C^2[0,1]$, *la solution supérieure de problème* (2.1), *si* $\beta(t)$ *vérifiée :*

$$\begin{cases} -D^{\alpha}_{0^+}\beta(t) \geq f(t,\beta(t)), \quad 0 < t < 1,\ 3 < \alpha \leq 4 \\ \beta(0) \geq 0, \beta'(0) \geq 0, \beta''(0) \geq 0, \beta''(1) \geq 0 \end{cases}$$

Définition 2.1.2. *[15] Soit une fonction* $a(t) \in C^2[0,1]$, *la solution inférieure de problème* (2.1), *si* $a(t)$ *vérifiée :*

$$\begin{cases} -D^{\alpha}_{0^+}a(t) \leq f(t,a(t)), \quad 0 < t < 1,\ 3 < \alpha \leq 4 \\ a(0) \leq 0, a'(0) \leq 0, a''(0) \leq 0, a''(1) \leq 0 \end{cases}$$

2.1.2 Résultat d'Existence

Théorème 2.1.1. *[15] le problème* (2.1) *posséde une solution positive* $u(t)$, *si il vérifiée la condition suivante :*
(H_f) *: soit* $f(t,u) \in C([0,1]\times[0,\infty[,\mathbb{R}^+)$, *une fonction non décroissant par rapport à deuxième variable* u, *et on a :*

$$f(t,\rho(t)) \neq 0, \qquad pour\ t \in [0,1],$$

avec existe une constant positive $\sigma < 1$ *:*

$$k^{\sigma} f(t,u) \leq f(t,ku), \qquad \forall\ 0 \leq k \leq 1$$

Preuve. *On suit les trois étapes suivantes :*
Etape (I) :
On pose les deux fonctions suivantes :

$$a(t) = k_1 g(t) \quad et \quad \beta(t) = k_2 g(t)$$

la solution inférieure $(a(t))$, *et supérieure* $(\beta(t))$, *pour problème* (2.1) *telle que :*

$$\begin{cases} 0 < k_1 \leq \min\left\{ \frac{1}{a_2}\ , (a_1)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \right\} \\ k_2 \geq \max\left\{ \frac{1}{a_1}\ , (a_2)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \right\} \end{cases}$$

et on a :

$$\begin{cases} a_1 = \min\left\{1\ ,\ \inf\limits_{t\in[0,1]} f(t,\rho(t))\right\} > 0 \\ a_2 = \max\left\{1\ ,\ \sup\limits_{t\in[0,1]} f(t,\rho(t))\right\} \end{cases}$$

et on a :

$$g(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,\rho(s))ds,$$

en vertu au lemme 2.1.3, on définit la fonction positive $g(t)$ la solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0^+}u(t) + f(t,\rho(t)) = 0 & 0 < t < 1\ , 3 < \alpha \leq 4 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

alors d'après le lemme 2.1.4, on a :

$$a_1\rho(t) \leq g(t) \leq a_2\rho(t), \qquad \forall t \in [0,1],$$

puis d'après le théorème 2.1.1, on a :

$$\begin{cases} k_1a_1 \leq \frac{a(t)}{\rho(t)} \leq k_1a_2 \leq 1 \\ \frac{1}{k_2a_2} \leq \frac{\rho(t)}{\beta(t)} \leq \frac{1}{k_2a_1} \leq 1 \\ (k_1a_1)^{\sigma} \geq k_1 \qquad (k_2a_2)^{\sigma} \leq k_2 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} f(t,a(t)) &= f(t,\frac{a(t)}{\rho(t)}\rho(t)) \\ &\geq (\frac{a(t)}{\rho(t)})^{\sigma} f(t,\rho(t)) \\ &\geq (k_1a_1)^{\sigma} f(t,\rho(t)) \\ &\geq k_1 f(t,\rho(t)) \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned} k_2f(t,\rho(t)) &= k_2 f(t,\frac{\rho(t)}{\beta(t)}\beta(t)) \\ &\geq k_2(\frac{\rho}{\beta})^{\sigma} f(t,\beta(t)) \\ &\geq k_2(k_2a_2)^{-\sigma} f(t,\beta(t)) \\ &\geq f(t,\beta(t)) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} -D^{\alpha}_{0^+}a(t) &= k_1f(t,\rho(t)) \leq f(t,a(t)) \qquad 0 < t < 1,\ 3 < \alpha \leq 4 \\ -D^{\alpha}_{0^+}\beta(t) &= k_2f(t,\rho(t)) \geq f(t,\beta(t)) \qquad 0 < t < 1,\ 3 < \alpha \leq 4 \end{aligned}$$

Alors

$$a(t) = k_1 g(t) \quad , \quad \beta(t) = k_2 g(t)$$

vérifié la condition initiale et encours, on a : $a(t) = k_1 g(t)$*, la solution inférieure et* $\beta(t) = k_2 g(t)$*, la solution supérieure de problème* (2.1).

Etape (II) :

On preuve le problème suivant :

$$\begin{cases} -D^{\alpha}_{0^+} u(t) = g(t, u(t)), & 0 < t < 1,\ 3 < \alpha \leq 4 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

possède une solution telle que :

$$g(t, u(t)) = \begin{cases} f(t, a(t)) & si \quad u(t) \leq a(t) \\ f(t, u(t)) & si \quad a(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \\ f(t, \beta(t)) & si \quad \beta(t) \leq u(t) \end{cases},$$

on prend l'opérateur $A : C^2[0,1] \to C^2[0,1]$ *défini par :*

$$Au(t) = \int_0^1 G(t,s) g(s, u(s)) ds,$$

tel que $G(t,s)$ *est défini précédent, on a* A *est continue sur* $C^2[0,1]$*, et la fonction* $f(t,u)$ *est non décroissante par rapport à deuxième variable de* u *pour tout* $u \in C^2[0,1]$ *on obtient :* $[f(t, a(t)) \leq g(t, u(t)) \leq f(t, \beta(t)), \quad$ *pour tout* $t \in [0,1],]$ *Donc il existe une constante* $M > 0$ *telle que :*
$|g(t, u(t))| \leq M$*, ce qui implique que* A *est uniformément borné pour tout* $u(t) \in C^2[0,1]$*, et* $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$*, alors on a :*

$$\begin{aligned} |Au(t_1) - Au(t_2)| &= \left| \int_0^1 G(t_1, s) g(s, u(s)) ds - \int_0^1 G(t_2, s) g(s, u(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_0^1 \left[G(t_1, s) - G(t_2, s) \right] g(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| G(t_1, s) - G(t_2, s) \right| g(s, u(s)) ds \\ &\leq \left| t_1^{\alpha - 1} - t_2^{\alpha - 1} \right| \int_0^1 f(s, \beta(s)) ds, \end{aligned}$$

donc A *est équicontinue, et d'après le théorème de Ascoli-Arzelà,* A *est compact. donc D'apres le théorème de Schauder l'opérateur* A*, admet un point fixe c'est à dire le probléme* (2.1) *admet une solution.*

Etape (III) :

On preuve que le problème (2.1) *possède une solution positive, suppose que* $u^*(t)$ *est*

une solution de problème (2.3) *et on a* $f(t,u)$ *est non décroissante par rapport à deuxième variable* u. *On définit l'égalité suivante :*

$$f(t,a(t)) \leq g(t,u^*(t)) \leq f(t,\beta(t)), \qquad \forall t \in [0,1]$$

Alors :

$$\begin{cases} -D^{\alpha}_{0^+} z(t) \ \geq \ f(t,\beta(t)) \ - g(t,u^*(t)) \ \geq \ 0 \\ z(0) = z'(0) = z''(0) = z''(1) = 0, \end{cases}$$

telle que : $z(t) \ = \ \beta(t) \ - \ u^*(t)$ *et par le lemme 2.1.3, on a :* $z(t) \geq 0$
i-e $u^*(t) \leq \beta(t) \ \ \forall t \in [0,1]$ *et par la même Méthode, on a :* $a(t) \leq u^*(t)$ *pour tout* $t \in [0,1]$.
Donc $u^*(t)$ *est une solution positive de problème* (2.1)
■

Exemple

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{7}{2}}_{0^+} u(t) \ + \ f(t,u(t)) \ = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases},$$

tell que : $f(t,u(t)) \ = \ t \ + \ u^{\sigma}$ *et* $0 < \sigma < 1$.

On a $f(t,u(t)) \ = \ t \ + \ u^{\sigma}$ *et,* $3 \ < \ \alpha = \frac{7}{2} \ \leq \ 4$ *et pour les deux constant* k, σ *tell que* $0 < \sigma < 1$ *et,* $0 \leq k \leq 1$ *on a :*

$$\begin{aligned} k^{\sigma} \ f(t,u) &= k^{\sigma} t \ + \ k^{\sigma} u^{\sigma} \\ &\leq t \ + \ (ku)^{\sigma} \qquad\qquad \text{parce que } k^{\sigma} \ \leq \ 1 \\ &= f(t,ku). \end{aligned}$$

Alors d'apres le théorème 2.1.1, le problème admet solution positive.

2.2 Equations Différentielles Fractionnaires de Type Caputo

Cette section constitue à la question d'existence et d'unicité de la solution pour le problème de Cauchy et le problème aux limites pour l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de type Caputo suivante :

1.

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \tag{2.4}$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *est une fonction continue.*

2.

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c \end{cases}, \tag{2.5}$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue. et* a, b, c *des constantes réelles telles que* $a + b \neq 0$.

2.2.1 Lemmes Fondamentaux

Lemme 2.2.1. *Soit* $\alpha > 0$, *l'équation différentialles*

$$^{C}D^{\alpha}h(t) = 0$$

admet la solution suivante :

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots\cdots + c_{n-1} t^{n-1}$$

$c_i \in \mathbb{R}, \;\; i = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \qquad n = [\alpha] + 1$

Lemme 2.2.2. *Soit* $\alpha > 0$ *:*
si $c_i \in \mathbb{R}, : i = 0, 1, 2, \cdots, n-1, \;\; n = [\alpha] + 1$ *on a :*

$$I^{\alpha} \; {}^{C}D^{\alpha}h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots\cdots + c_{n-1} t^{n-1}$$

Preuve.
Soit $\alpha > 0$, *et* $\forall h \in C^n([0, 1])$, *on a :*

$$\begin{aligned} I^{\alpha} \; {}^{C}D^{\alpha}h(t) &= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} t^k \\ &= h(t) - \left[h(0) + h'(0)t + \frac{h''(0)}{2} t^2 + \cdots + \frac{h^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} t^{n-1} \right] \end{aligned}$$

on pose $c_i = -\frac{h^{(i)}(0)}{m!} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$, *on trouve l'égalité .*

■

2.2.2 Problème de Cauchy dans le cas $0 < \alpha < 1$

On va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire on utilise la dérivée au sens de Caputo qui s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in J = [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.6}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est une fonction continue.

Proposition 2.2.1. *[3] Soit $0 < \alpha < 1$ et $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. la fonction y :*

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - x)^{\alpha - 1} h(x) dx \tag{2.7}$$

est une solution de l'équation intégrale si et seulement si y est la solution du problème à valeur initiale pour l'équation :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}y(t) = h(t), \qquad t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Preuve.
On applique l'opérateur I^{α}, on a :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}\ {}^{C}D^{\alpha}y &= I^{\alpha}h(t) \\ y(t) + c_0 &= I^{\alpha}h(t) \qquad\qquad alors \\ y(t) &= I^{\alpha}h(t) - c_0 \end{aligned}$$

D'après les conditions aux limites, on a :

$$y(0) = (I^{\alpha}h)(0) - c_0 = -c_0 \ .$$

Alors

$$-c_0 = y_0 \quad \Rightarrow c_0 = -y_0.$$

donc on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= I^{\alpha}h(t) - (-y_0) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - x)^{\alpha - 1} h(x) dx + y_0 \end{aligned}$$

Inversement on a :

$$y(t) = (I^{\alpha}h)(t) + y_0$$

on applique ${}^{C}D^{\alpha}$ *à l'équation présidente, on a :*

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}y(t) &= {}^{C}D^{\alpha}(I^{\alpha}h)(t) + {}^{C}D^{\alpha}[y_0] \\ &= h(t) \end{aligned}$$

donc il reste de vérifier que si, $y(0) = y_0$
on a :

$$\begin{aligned} y(0) &= I^{\alpha}h(0) + y_0 \\ &= 0 + y_0 \\ &= y_0. \end{aligned}$$

Alors y est une solution du problème.

■

Résultat Existence et Unicité :

Pour étudier des résultats d'existence et d'unicité de ce problème on utilise le théorème de point fixe de Banach.
et pour étudier l'existence et l'unicité de la solution (2.6)*, impose des conditions sur l'espace* $C[0,T]$*.*
Notre approche est basée sur la réduction du problème considéré en une équation intégrale suivante :

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y(x))dx, \quad 0 \le t \le T \tag{2.9}$$

Lemme 2.2.3. *[5] Soit* $\alpha \in \mathbb{R}(0 < \alpha < 1)$*, et* $f_{1-\alpha}(t) = \left(I_{0^+}^{1-\alpha} f\right)(t)$*, on a si* $f(t) \in C[0,T]$ *et* $f_{1-\alpha}(t) \in C^1[0,T]$*, alors :*

$$(I^{\alpha}D^{\alpha}f)(t) = f(t) - \frac{f_{1-\alpha}(0)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}, \quad t \in [0,T] \tag{2.10}$$

Lemme 2.2.4. *[5]*
L'opérateur d'intégration $I_{0^+}^{\alpha}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est borné dans* $C[0,T]$

$$\|I^{\alpha}g\|_C \le \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\|g\|_C . \tag{2.11}$$

Théorème 2.2.1. *[5] Soit* $0 < \alpha < 1$*, et* G *un ouvert de* $\mathbb{R}$*,* $f :]0,T] \times G \to \mathbb{R}$ *vérifie la condition de Lipschitz suivant :*
(H1) il existe une constante $k > 0$ *;*

$$|f(t,y) - f(t,z)| \le k\,|y - z|\,, \quad \forall t \in [0,T], \text{ et } y, z \in G$$

et

$$k\frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$$

Alors, il existe une solution unique $y(t)$ *pour le problème de Cauchy* (2.6)*, dans l'espace* $C[0,T]$.

Preuve. *On utilise le théorème du point fixe de Banach pour l'espace* $C[0,T]$ *qui est un espace métrique complet avec la distance donnée par :*

$$d(x_1,x_2) = \|x_1 - x_2\|_{C[0,T]} = \sup_{t\in[0,T]} |x_1(t) - x_2(t)|,$$

on récrit l'équation (2.7) *sous la forme suivant :*

$$y(t) = (Ty)(t)$$

où

$$(Ty)(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x,y(x))dx, \tag{2.12}$$

pour appliquer le théorème de Banach, il faut montrer :

1. *Si* $y(t) \in C[0,T]$ *Alors* $(Ty)(t) \in C[0,T]$,
2. *pour chaque* $y_1, y_2 \in C[0,T]$*, on a :*

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{C[0,T]} \leq w \|y_1 - y_2\|_{C[0,T]} \text{ avec } (0 < w < 1) \tag{2.13}$$

comme $f(t,y) \in C[0,T]$*, et tenant compte du lemme 2.2.4, on a :*

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(x,y(x))}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \right\|_{C[0,T]} \leq \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(t,y(t))\|_{C[0,T]}$$

alors $(Ty)(t) \in C[0,T]$*. montrons maintenant* (2.13)*.*
d'après lemme 2.2.4, et en utilisant la condition de Lipschitiz on obtient :

$$\begin{aligned}
\|Ty_1 - Ty_2\|_{C[0,T]} &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [f(x,y_1(x)) - f(x,y_2(x))] (t-x)^{\alpha-1} dx \right\|_{C[0,T]} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f(x,y_1(t)) - f(x,y_2(t))\|_{C[0,T]} \int_0^T (t-x)^{\alpha-1} dx \\
&\leq \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(x,y_1(t)) - f(x,y_2(t))\|_{C[0,T]} \\
&\leq \frac{kT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|y_1 - y_2\|_{C[0,T]}
\end{aligned}$$

on a $w = \frac{kT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$*, Alors d'après le théorème du point fixe de Banach il existe une solution unique* $y(t) \in C[0,T]$*, de l'équation* (2.6)*sur* $[0,T]$.

■

2.2.3 Problème aux Limites dans le cas $0 < \alpha < 1$

Dans cette partie on va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire :

Définition 2.2.1. *On dit qu' une fonction $y \in C^1([0,T],\ \mathbb{R})$, est une solution du problème (2.5), si y vérifier l'équation ${}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t))$, sur $[0,T]$ avec la condition $ay(0) + by(T) = c$.*

Proposition 2.2.2. *[3] Soit $0 < \alpha < 1$, et $h : [0,T] \to \mathbb{R}$, une fonction continue. Une fonction y*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} h(x)dx - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} h(x)dx - c\right], \quad (2.14)$$

est une solution de l'équation intégrale fractionnaire si et seulement si y est la solution du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = h(t), & t \in [0,T] \\ ay(0) + by(T) = c \end{cases} \quad (2.15)$$

Preuve. *On applique l'opérateur I^α, on a :*

$$\begin{aligned} I^\alpha\ {}^C D^\alpha y &= I^\alpha h(t) \\ y(t) + c_0 &= I^\alpha h(t) \\ y(t) &= I^\alpha h(t) - c_0 \end{aligned}$$

Alors d'après les conditions aux limites, on a :

$$\begin{cases} y(0) = (I^\alpha h)(0) - c_0 = -c_0 \\ y(T) = (I^\alpha h)(T) - c_0. \end{cases}$$

Alors

$$ay(0) + by(T) = c \ \Rightarrow\ -ac_0 + b[I^\alpha h(T) - c_0] = c \quad \Rightarrow$$

$(a+b)c_0 = b(I^\alpha h)(T) - c \Rightarrow c_0 = \frac{1}{a+b}[b(I^\alpha h)(T) - c], \quad a + b \neq 0$
donc on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= I^\alpha h(t) - \frac{1}{a+b}[b(I^\alpha h)(T) - c] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} h(x)dx - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} h(x)dx - c\right], \end{aligned}$$

Inversiment on a :

$$y(t) = (I^\alpha h)(t) - \frac{1}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c],$$

on applique ${}^{C}D^{\alpha}$ *à l'équation présidente, on a :*

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}y(t) &= {}^{C}D^{\alpha}(I^{\alpha}h)(t) - {}^{C}D^{\alpha}[\frac{1}{a+b}(bI^{\alpha}h(T) - c] \\ &= h(t) \end{aligned}$$

donc il reste de vérifier que si, $ay(0) + by(T) = c.$

$$on\ a \begin{cases} y(0) = I^{\alpha}h(0) - \frac{1}{a+b}\left[b(I^{\alpha}h)(T) - c\right] & .....(1) \\ y(T) = I^{\alpha}h(T) - \frac{1}{a+b}\left[b(I^{\alpha}h)(T) - c\right] & .....(2) \end{cases}$$

de (1) *et* (2) *on a :*

$$\begin{aligned} ay(0) + by(T) &= \frac{-a}{a+b}\left[b(I^{\alpha}h)(T) - c\right] + b(I^{\alpha}h)(T) - \frac{b}{a+b}\left[b(I^{\alpha}h)(T) - c\right] \\ &= -\frac{a+b}{a+b}\left[b(I^{\alpha}h)(T) - c\right] + b(I^{\alpha}h)(T) \\ &= -b(I^{\alpha}h)(t) + c + b(I^{\alpha}h)(T) \\ &= c. \end{aligned}$$

Alors y est une solution du problème . ■

Résultat Existence et Unicité :

I) *En utilisant le théorème de contraction de Banach pour l'unicité de la solution du problème* (2.5).

Théorème 2.2.2. *[3] Supposons que :*
(H2) $\exists k > 0$, *telle que*

$$|f(t,x) - f(t,z)| \leq k|x - z|, \quad \forall t \in J, \ et \ x, z \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\frac{kT^{\alpha}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{2.16}$$

Donc, le problème (2.5) *admet une solution unique sur* $[0, T]$

Preuve. *On transformé le problème* (2.5) *en un problème de point fixe, on a :*

$$F : C([0,T], \mathbb{R}) \to C([0,T], \mathbb{R})$$

défini par :

$$F(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y(x))dx - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-x)^{\alpha-1} f(x, y(x))dx - c\right]. \tag{2.17}$$

Donc les points fixes de F sont les solutions du problème (2.5), *on a :*
F est bien défini, en effet : si $y \in C([0,T],\mathbb{R})$, alors $(Fy) \in C([0,T],\mathbb{R})$,
donc si on montrer F est contraction alors F admet un point fixe, en effet si $y, z \in C([0,T],\mathbb{R})$, alors $\forall t \in J$, on a :

$$|F(y)(t) - F(z)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} |f(x,y(x)) - f(x,z(x))|\, dx$$

$$+\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} |f(x,y(x)) - f(x,z(x))| dx$$

$$\leq \frac{k \|y-z\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx$$

$$+\frac{|b| k \|y-z\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} dx$$

$$\leq \frac{kT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|y-z\|_\infty$$

Donc

$$\|F(y) - F(z)\|_\infty \leq \frac{kT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|y-z\|_\infty$$

Donc on peut déduire que F est un contraction et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe. cette point est la solution du problème (2.5).

■

II) *Pour le deuxième résultat d'existence de la solution du* (2.5). *En utilisant le théorème du point fixe de Schaefer .*

Théorème 2.2.3. *[3] Supposons que*

(H3) La fonction $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

(H4) Il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$|f(t,x)| \leq M, \quad \forall t \in [0,T], \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Alors, le problème (2.5) *admet au moins une solution sur [0,T].*

Preuve.
Pour montrer F de (2.5) *admet un point fixe, on a* 4 *étape suivant :*
Etape (I) :
F est continue : soit $\{y_n\}$ une suite convergente pour la norme $\|.\|_\infty$ vers y
C-à-d

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|_\infty = 0$$

Il faut montrer que $\lim_{n\to\infty} \|F(y_n) - F(y)\|_\infty = 0, \quad \forall t \in [0,T]$ *on a :*

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} |f(x, y_n(x) - f(x, y(x))| \, dx \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} |f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| \, dx \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} \sup_{x\in[0,T]} |f(x, y_n(x) - f(x, y(x))| \, dx \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} \sup_{x\in[0,T]} |f(x, y_n(x) - f(x, y(x))| \, dx \\
&\leq \frac{\|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx + \frac{|b|}{|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} dx \right] \\
&\leq \frac{T^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

f est continue alors,

$$\|F(y_n)(t) - F(y)(t)\| \leq \frac{T^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \to 0 \text{ quand } n \to \infty$$

d'où la continuité de F.

Etape(II) :

On a si $F(\{E\})$ *est borné* $\Rightarrow \{E\}$ *est borné dans* $C([0,T], \mathbb{R})$*,*
en effet, suffit de montrer que pour tout $\sigma > 0$*, il existe une constante* $L > 0$ *: pour tout* $y \in U_\sigma$*,* $U_\sigma = \{y \in C([0,T], \mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \sigma\}$*, on a* $\|F(y)\|_\infty \leq L$ *. par* $(H4)$ *on a pour tout* $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} |f(x, y(x))| \, dx \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} |f(x, y(x))| \, dx + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} dx + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|}
\end{aligned}$$

Alors :

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = L$$

Donc par suite, $F(U_\sigma)$ est borné.

Etape (III) :
$F(\{E\}) : (\{E\}$ est borné) est un ensemble équicontinu de $C([0,T],\mathbb{R})$. Soit $t_1, t_2 \in [0,T],\ t_1 < t_2,\ U_\sigma$ un ensemble borné de $C([0,T],\mathbb{R})$ et soit $y \in U_\sigma$,
Alors :

$$\begin{aligned}|F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - x)^{\alpha-1} - (t_2 - x)^{\alpha-1}\right] dx \\ &\quad + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - x)^{\alpha-1} dx \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha\right] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1^\alpha - t_2^\alpha)\end{aligned}$$

quand $t_1 \to t_2$, le momber à droit de l'inégalité précédent tend vers 0, d'où la continuité de F d'après l'étape (II), et (III), et le théorème d'Ascoli-Arzélà, $F(U_\sigma)$ est relativement compact pour tout borné U_σ .
***C-à-d** F est complètement continu et par l'étape I, F est continu par conséquent, $F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu .*

Etape (VI) :
Donc il reste à montrer que $\varepsilon = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : y = \lambda F(y)$ tell que $0 < \lambda < 1\}$, est borné et $y \in \varepsilon \Rightarrow y = \lambda F(y)$, tell que $0 < \lambda < 1$ .donc $\forall t \in J$, On a :

$$y(t) = \lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - x)^{\alpha-1} f(x, y(x)) dx - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - x)^{\alpha-1} f(x, y(x)) dx - c\right]\right]$$

et d'après $(H4)$, et $\forall t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - x)^{\alpha-1} |f(x, y(x))| dx \\ &\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T - x)^{\alpha-1} |f(x, y(x))| dx + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - x)^{\alpha-1} dx + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\quad + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T - x)^{\alpha-1} dx\end{aligned}$$

$$\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^{\alpha} + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|}T^{\alpha} + \frac{|c|}{|a+b|}$$

Alors, $\forall t \in [0,T]$*, on a :*

$$\|F(y)\|_{\infty} \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^{\alpha} + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|}T^{\alpha} + \frac{|c|}{|a+b|} = R.$$

ε *montre que est borné alors on a d'après théorème de Schaefer on déduit que* F *admet au moins un point fixe qui est une solution du problème* (2.5).

■

Exemple 2.2.1. *Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}y(t) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^{t})(1+|y(t)|}, \ t \in J = [0,1], et\ 0 < \alpha \leq 1 \\ \\ y(0) + y(1) = 0. \end{cases}$$

Montrer que le problème admet une seule solution.
posons

$$f(t,x) = \frac{e^{-t}x}{(9+e^{t})(1+x)}, \ : (t,x) \in J \times [0,\infty[$$

soit $z, y \in [0,\infty[$ *et* $t \in J$*. Alors on a :*

$$\begin{aligned} |f(t,z) - f(t,y)| &= \frac{e^{-t}}{(9+e^{t}}\left|\frac{z}{(1+z)} - \frac{y}{(1+y)}\right| \\ &= \frac{e^{-t}|z-y|}{(9+e^{t})(1+z)(1+y)} \\ &\leq \frac{e^{-t}}{(9+e^{t})}|z-y| \\ &\leq \frac{1}{10}|z-y| \end{aligned}$$

Alors $(H2)$ *est satisfait avec* $k = \frac{1}{10}$ *on doit la condition* (2.16) *est vérifiée pour* α *et* $a = b = T = 1$*. En effet*

$$\frac{3k}{2\Gamma(\alpha+1)} < 1 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha+1) > \frac{3k}{2} = 0.15 \qquad (*)$$

Alors on utilise le théorème 2.2.2, le problème admet une seule solution sur $[0,1]$ *pour* α *satisfaisant* $(*)$ *.*

2.3 Equations Différentielles Fractionnaires de Type Katugampola

Dans cette section, nous étudions l'existence et l'unicité de solutions pour une classe d'équations différentielles fractionnaires non linéaires implicites de Katugampola avec une condition initiale :

$$\begin{cases} {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(t) = f\left(t, u(t), {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(t)\right), & t \in [0,T]. \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

où $0 < \alpha \leq 1, \quad \rho > 0, \quad$ *et* $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Les arguments se fondent sur le principe de solution de Banach , de Schauder et alternative de type Leray-Schauder.

2.3.1 Lemmes Fondamentaux

Dans Toute la section ; T, p et c sont des constantes réelles. telles que :

$$p \geq 1, \quad c > 0, \quad et \quad T \leq (pc)^{\frac{1}{pc}}. \tag{2.19}$$

Dans ce qui suit, nous présentons quelques lemmes significatives pour montrer les théorèmes principaux, nous l'avons :

Lemme 2.3.1. *Soit* $\alpha, \rho > 0$. *Si* $u \in C[0,T]$, *alors :*
(i) *L'équation différentielle fractionnaire* ${}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(t) = 0$, *admet une solution unique :*

$$u(t) = C_1 t^{\rho(\alpha-1)} + C_2 t^{\rho(\alpha-2)} + \cdots + C_n t^{\rho(\alpha-n)}, \ \ tell\ que \ \ C_m \in \mathbb{R}, \ \ et \ \ m = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.20}$$

(ii) *Si* ${}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u \in C[0,T]$ *et* $0 < \alpha \leq 1$, *alors :*

$${}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{0^+} \, {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(t) = u(t) + Ct^{\rho(\alpha-1)}, \quad pour\ certain\ constant\ C \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Preuve. (i) Soit $\alpha, \rho > 0$. par la remarque 1.3.6, on a :

$${}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} t^{\rho(\alpha-m)} = 0, \quad pour\ tout \ \ m = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.22}$$

Donc l'équation différentielle fractionnaire ${}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(t) = 0$, admet une solution particulière suivante :

$$u(t) = C_m t^{\rho(\alpha-m)}, \quad C_m \in \mathbb{R}, \ \ pour\ tout \ \ m = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.23}$$

Ainsi, la solution générale de ${}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)=0$, est une somme de solutions particulières (2.23), i.e.

$$u(t)=C_1t^{\rho(\alpha-1)}+C_2t^{\rho(\alpha-2)}+\cdots+C_nt^{\rho(\alpha-n)},\qquad C_m\in\mathbb{R}\quad(m=1,2,\ldots,n). \tag{2.24}$$

(ii) Soit ${}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u\in C[0,T]$ la dérivée fractionnaire de katugampola d'order $0<\alpha\leq 1$. Si nous appliquons l'opérateur ${}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}$ a ${}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)-u(t)$, et utilisez les propriétés (1.2), (1.3), nous avons :

$$\begin{aligned}{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\left[{}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)-u(t)\right] &= {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\ {}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)-{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)\\ &= {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)-{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Aprés étape **(i)**, il existe $C\in\mathbb{R}$, telle que

$${}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)-u(t)=Ct^{\rho(\alpha-1)}, \tag{2.25}$$

ce qui implique la loi de composition (2.21) ■ En nous basant sur le lemme précédent, nous définirons la solution du problème de la valeur initiale (2.18).

Lemme 2.3.2. *Soit $\alpha,\rho\in\mathbb{R}$, soit tel que $0<\alpha\leq 1$, et $\rho>0$. Nous donnons $u,\ {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u\in C[0,T]$, et $f(t,u,v)$ est une fonction continue. Alors le problème* (2.18) *est équivalent à l'équation intégrale fractionnaire :*

$$u(t)=\int_0^t G(t,s)\,f\left(s,u(s),{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(s)\right)ds, \tag{2.26}$$

tel que :

$$G(t,s)=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}s^{\rho-1}\left(t^{\rho}-s^{\rho}\right)^{\alpha-1}. \tag{2.27}$$

Preuve. Soit $0<\alpha\leq 1$, avec $\rho>0$. Nous pouvons appliquer lemme 2.3.1, à réduire l'équation fractionnaire (2.18) à une équation intégrale fractionnaire équivalente. par appliquant ${}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}$ à l'équation (2.18) on obtient :

$${}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)={}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}f\left(t,u(t),{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)\right). \tag{2.28}$$

par le lemme 2.3.1, on trouve facilement :

$${}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)=u(t)+C't^{\rho(\alpha-1)}, \tag{2.29}$$

Pour certain $C'\in\mathbb{R}$. Alors, l'équation de l'intégrale fractionnaire (2.28), donnée par :

$$u(t)={}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}f\left(t,u(t),{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)\right)+Ct^{\rho(\alpha-1)}, \tag{2.30}$$

pour quelques $C \in \mathbb{R}$. La condition de(2.18) implique que :

$$u(0) = 0 = C \lim_{t \to 0^+} t^{\rho(\alpha-1)} \Rightarrow C = 0. \tag{2.31}$$

Par conséquent, le problème (2.18) est équivalent :

$$u(t) = \int_0^t G(t,s) f(s, u(s), {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(s)) ds, \tag{2.32}$$

tell que $G(t,s)$, qui donné par l'égalité (2.27) Alors le preuve est complète. ■

Maintenant, nous allons prouver le premier résultat d'existence pour le problème (2.18) qui repose sur théorème du point fixe de Banach . Nous imposons les hypothèses suivantes :

(**H1**) $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
(**H2**) Il existe deux constantes positives $\lambda, \beta > 0$, et $\beta < 1$ tell que :

$$|f(t,u,v) - f(t,\tilde{u},\tilde{v})| \leq \lambda |u - \tilde{u}| + \beta |v - \tilde{v}|, \tag{2.33}$$

pour n'importe quel $u, v, \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,T]$.
(**H3**) Il existe trois fonctions positives $a, b, c \in [0,T]$ tell que :

$$|f(t,u,v)| \leq a(t) + b(t)|u| + c(t)|v| \ \ \forall t \in [0,T] \quad et \quad u, v \in \mathbb{R}. \tag{2.34}$$

Nous dénotons

$$M_0 = \frac{a^*}{1-c^*}, \qquad et \qquad M_1 = \frac{b^*}{1-c^*}, \tag{2.35}$$

tell que :

$$a^* = \sup_{t \in [0,T]} a(t), \qquad b^* = \sup_{t \in [0,T]} b(t), \qquad c^* = \sup_{t \in [0,T]} c(t), \quad avec \quad c^* < 1. \tag{2.36}$$

2.3.2 Résultat d'Existence

Théorème 2.3.1. *supposent les hypothèses* (**H1**)-(**H2**) *correct. nous donnons* $0 < \alpha \leq 1$, *et* $\rho > 0$, *si*

$$\frac{\lambda T^{\rho\alpha}}{(1-\beta)\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)} < 1. \tag{2.37}$$

Alors le problème de valeur initiale (2.18) *admet une solution unique sur* $[0,T]$.

Preuve. Premièrement, pour commencer la preuve, nous allons transformer le problème (2.18) sous forme de fixed point problème. Définir l'opérateur $\mathcal{A} : C[0,T] \to C[0,T]$ par :

$$\mathcal{A}u(t) = \int_0^t G(t,s) f(s, u(s), {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(s)) ds. \tag{2.38}$$

Parce que le problème (2.18) est équivalent à l'équation intégrale fractionnaire (2.38), Donc les points fixes de $\mathcal{A}$ sont des solutions de problème (2.18)
Soit $u, v \in C[0,T]$, telles que :

$$ {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(t) = f\left(t, u(t), {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(t)\right), \qquad {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} v(t) = f\left(t, v(t), {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} v(t)\right). \quad (2.39) $$

Ce qui implique que :

$$ \mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}v(t) = \int_0^t G(t,s)\left[f\left(s, u(s), {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(s)\right) - f\left(s, v(s), {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} v(s)\right)\right] ds, \quad (2.40) $$

Alors pour tout $t \in [0,T]$

$$ \left|\mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}v(t)\right| \leq \int_0^t G(t,s)\left|{}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(s) - {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} v(s)\right| ds. \quad (2.41) $$

par (**H2**) on a :

$$ \begin{aligned} \left|{}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(t) - {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} v(t)\right| &= \left|f\left(t, u(t), {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(t)\right) - f\left(t, v(t), {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} v(t)\right)\right| \\ &\leq \lambda\left|u(t) - v(t)\right| + \beta\left|{}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(t) - {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} v(t)\right|. \end{aligned} $$

Ainsi

$$ \left|{}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(t) - {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} v(t)\right| \leq \frac{\lambda}{1-\beta}\left|u(t) - v(t)\right|. \quad (2.42) $$

par (2.41) on a :

$$ \left|\mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}v(t)\right| \leq \frac{\lambda}{1-\beta}\int_0^t G(t,s)\left|u(s) - v(s)\right| ds. \quad (2.43) $$

Donc

$$ \left\|\mathcal{A}u - \mathcal{A}v\right\|_{\infty} \leq \frac{\lambda T^{\rho\alpha}}{(1-\beta)\,\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}\left\|u - v\right\|_{\infty}. \quad (2.44) $$

Ceci implique par (2.37) que $\mathcal{A}$ est un opérateur de contraction. En conséquence du théorème de Banach principe de contraction, on déduit que $\mathcal{A}$ admet unique point fixed lorsque cette point est une solution unique du problème de la valeur initiale (2.18) on $[0,T]$. ■

Théorème 2.3.2. *suppose que les hypothèses* (**H1**), (**H2**) *et* (**H3**) *correct. Si on mettait*

$$ \frac{M_1 T^{\rho\alpha}}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)} < 1. \quad (2.45) $$

Alors le problème de valeur initiale (2.18) *admet au moins une solution sur* $[0,T]$.

Preuve. Dans le théorème précédent, nous transformons déjà le problème (2.18) en un problème de point fixe .

$$\mathcal{A}u\left(t\right)=\int_{0}^{t}G\left(t,s\right)f\left(s,u\left(s\right),{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u\left(s\right)\right)ds. \tag{2.46}$$

Nous démontrons que $\mathcal{A}$ satisfait à l'hypothèse de Schauder's théorème du point fixe . La preuve se divise en trois étapes.

Etape 1 : $\mathcal{A}$ est un opérateur continu.

Soit $\left(u_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ être une séquence réelle telle que $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n}=u$ in $C\left[0,T\right]$. Donc pour tout $t\in\left[0,T\right]$,

$$\left|\mathcal{A}u_{n}\left(t\right)-\mathcal{A}u\left(t\right)\right|\leq\int_{0}^{t}G\left(t,s\right)\left|f\left(s,u_{n}\left(s\right),{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u_{n}\left(s\right)\right)-f\left(s,u\left(s\right),{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u\left(s\right)\right)\right|ds, \tag{2.47}$$

tell que :

$$\begin{aligned}{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u_{n}\left(t\right)&=f\left(t,u_{n}\left(t\right),{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u_{n}\left(t\right)\right),\qquad&{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u\left(t\right)&=f\left(t,u\left(t\right),{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u\left(t\right)\right).\end{aligned} \tag{2.48}$$

Comme conséquence de (**H2**), nous trouvons facilement ${}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u_{n}\rightarrow{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u$ in $C\left[0,T\right]$. en fait nous avons :

$$\begin{aligned}\left|{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u_{n}\left(t\right)-{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u\left(t\right)\right|&=\left|f\left(t,u_{n}\left(t\right),{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u_{n}\left(t\right)\right)-f\left(t,u\left(t\right),{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u\left(t\right)\right)\right|\\&\leq\lambda\left|u_{n}\left(t\right)-u\left(t\right)\right|+\beta\left|{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u_{n}\left(t\right)-{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u\left(t\right)\right|.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left|{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u_{n}\left(t\right)-{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u\left(t\right)\right|\leq\frac{\lambda}{1-\beta}\left|u_{n}\left(t\right)-u\left(t\right)\right|. \tag{2.49}$$

Puisque $u_{n}\rightarrow u$, donc nous donnons ${}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u_{n}\left(t\right)\rightarrow{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u\left(t\right)$ comme $n\rightarrow\infty$ pour tout $t\in\left[0,T\right]$.

soit $0<K_{0}<\infty$, tel que pour chaque $t\in\left[0,T\right]$, on a :

$$\left|{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u_{n}\left(t\right)\right|\leq K_{0},\quad et\qquad\left|{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u\left(t\right)\right|\leq K_{0}. \tag{2.50}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{A}u_{n}\left(t\right)-\mathcal{A}u\left(t\right)\right|&\leq\int_{0}^{t}G\left(t,s\right)\left|f\left(s,u_{n}\left(s\right),{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u_{n}\left(s\right)\right)-f\left(s,u\left(s\right),{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u\left(s\right)\right)\right|ds\\&\leq\int_{0}^{t}G\left(t,s\right)\left|{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u_{n}\left(s\right)-{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u\left(s\right)\right|ds\\&\leq\int_{0}^{t}G\left(t,s\right)\left[\left|{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u_{n}\left(s\right)\right|+\left|{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^{+}}^{\alpha}u\left(s\right)\right|\right]ds\leq\int_{0}^{t}2K_{0}G\left(t,s\right)ds.\end{aligned}$$

Pour chaque $t \in [0,T]$, la fonction $s \to 2K_0 G(t,s)$ est integrable dans $[0,t]$, alors le théoréme de convergence dominé par Lebesgue et (2.47) implique

$$|\mathcal{A}u_n(t) - \mathcal{A}u(t)| \to 0 \quad comme \quad n \to \infty, \tag{2.51}$$

et donc

$$\|\mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u\|_\infty \to 0 \quad comme \quad n \to \infty. \tag{2.52}$$

Par conséquent, $\mathcal{A}$ est continu.

Etape 2 : basé sur (2.45), soit positif réal r, tell que ;

$$r \geq \frac{M_0 T^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1) - M_1 T^{\rho\alpha}}. \tag{2.53}$$

Nous définissons :

$$P_r = \{u \in C[0,T] : \|u\|_\infty \leq r\}. \tag{2.54}$$

Il est clair que P_r est un sous-ensemble limité, fermé et convexe de $C[0,T]$.
Soit $u \in P_r$, et $\mathcal{A} : P_r \to C[0,T]$ est l'opérateur intégral défini dans (2.38), Alors $\mathcal{A}(P_r) \subset P_r$.
En fait, pour chaque $t \in [0,T]$ que nous avons de (**H3**) :

$$\begin{aligned} |{}^\rho\mathcal{D}^\alpha_{0^+} u(t)| &= |f(t, u(t), {}^\rho\mathcal{D}^\alpha_{0^+} u(t))| \\ &\leq a(t) + b(t)|u(t)| + c(t)|{}^\rho\mathcal{D}^\alpha_{0^+} u(t)|. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |{}^\rho\mathcal{D}^\alpha_{0^+} u(t)| &\leq \frac{a^*}{1-c^*} + \frac{b^*}{1-c^*} r \qquad (2.55) \\ &\leq M_0 + M_1 r. \qquad (2.56) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}u(t)| &\leq \int_0^t G(t,s)|f(s,u(s), {}^\rho\mathcal{D}^\alpha_{0^+} u(s))|\,ds \\ &\leq \int_0^t G(t,s)[M_0 + M_1 r]\,ds \\ &\leq \frac{M_0 T^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)} + \frac{M_1 T^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)} r \\ &\leq \frac{[\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1) - M_1 T^{\rho\alpha}] \frac{M_0 T^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1) - M_1 T^{\rho\alpha}} + M_1 T^{\rho\alpha} r}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq \frac{[\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1) - M_1 T^{\rho\alpha}] r + M_1 T^{\rho\alpha} r}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq r. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{A}(P_r) \subset P_r$.
Etape 3 : $\mathcal{A}(P_r)$ est relativement compacte.
Soit $t_1, t_2 \in [0,T]$,$t_1 < t_2$, et $u \in P_r$. Alors :

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}u(t_2) - \mathcal{A}u(t_1)| &= \left| \int_0^{t_2} G(t_2,s) f(s,u(s), {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(s))\, ds - \int_0^{t_1} G(t_1,s) f(s,u(s), {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(s))\, ds \right| \\ &\leq \int_0^{t_1} |[G(t_2,s) - G(t_1,s)] f(s,u(s), {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(s))|\, ds \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} G(t_2,s) |f(s,u(s), {}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} u(s))|\, ds \\ &\leq (M_0 + M_1 r) \left[\int_0^{t_1} |(G(t_2,s) - G(t_1,s))|\, ds + \int_{t_1}^{t_2} G(t_2,s)\, ds \right]. \end{aligned} \tag{2.57}$$

On a :

$$\begin{aligned} G(t_2,s) - G(t_1,s) &= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} s^{\rho-1} \left[(t_2^{\rho} - s^{\rho})^{\alpha-1} - (t_1^{\rho} - s^{\rho})^{\alpha-1} \right] \\ &= \frac{-1}{\alpha \rho^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{d}{ds} \left[(t_2^{\rho} - s^{\rho})^{\alpha} - (t_1^{\rho} - s^{\rho})^{\alpha} \right] \end{aligned}$$

Alors ;

$$\int_0^{t_1} |(G(t_2,s) - G(t_1,s))|\, ds \leq \frac{1}{\rho^{\alpha} \Gamma(\alpha+1)} \left[(t_2^{\rho} - t_1^{\rho})^{\alpha} + (t_2^{\rho\alpha} - t_1^{\rho\alpha}) \right] \tag{2.58}$$

Encore on a :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} G(t_2,s)\, ds &= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} s^{\rho-1} (t_2^{\rho} - s^{\rho})^{\alpha-1}\, ds = \frac{-1}{\alpha \rho^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \left[(t_2^{\rho} - s^{\rho})^{\alpha} \right]_{t_1}^{t_2} \\ &\leq \frac{1}{\rho^{\alpha} \Gamma(\alpha+1)} (t_2^{\rho} - t_1^{\rho})^{\alpha}. \end{aligned}$$

Alors :

$$|\mathcal{A}u(t_2) - \mathcal{A}u(t_1)| \leq \frac{M_0 + M_1 r}{\rho^{\alpha} \Gamma(\alpha+1)} \left[2(t_2^{\rho} - t_1^{\rho})^{\alpha} + (t_2^{\rho\alpha} - t_1^{\rho\alpha}) \right]. \tag{2.59}$$

Comme $t_1 \to t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro,
En conséquence des étapes 1 à 3, et par de moyen de théorème l'Arzelá-Ascoli , en déduit que $\mathcal{A} : P_r \to P_r$ est continue, compacte et répond à l'hypothèse du théorème point fixe de Schauder . puis $\mathcal{A}$ dispose d'un point fixe qui est une solution du problème (2.18) sur $[0,T]$. ■

Théorème 2.3.3. *suppose que* (**H1**), (**H2**) *et* (**H3**) *corecte. Alors le problème de valeur initiale* (2.18) *admet au moins une solution sur* $[0,T]$.

Preuve. Soit $\alpha, \rho > 0$, tell que $\alpha \leq 1$. Nous allons montrer que le opérateur $\mathcal{A}$ défini dans (2.38), satisfait à l'hypothèse du théorème de Leray-Schauder du point fixe .

La preuve sera donnée en plusieurs étapes.
Etape 1 : Clairement $\mathcal{A}$ est continu.
Etape 2 : $\mathcal{A}$ mappe les ensembles délimités en ensembles délimités dans $C[0,T]$.
En effet, il suffit de montrer que pour tout $\omega > 0$ il existe un positif constant ℓ tell que pour tout $u \in B_\omega = \{u \in C[0,T] : \|u\|_\infty \leq \omega\}$, on a : $\|\mathcal{A}u\|_\infty \leq \ell$.
Pour $u \in B_\omega$, On a, pour tout $t \in [0,T]$,

$$|\mathcal{A}u(t)| \leq \int_0^t G(t,s) \left| f\left(s, u(s), {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(s)\right)\right| ds. \tag{2.60}$$

Par (**H3**), et (2.56) on a pour chaque $t \in [0,T]$, on a :

$$\left| f\left(t, u(t), {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t)\right)\right| \leq M_0 + M_1\omega. \tag{2.61}$$

Ainsi (2.60) ce que implique

$$\|\mathcal{A}u\|_\infty \leq \frac{M_0 T^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)} + \frac{M_1 T^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}\omega = \ell. \tag{2.62}$$

Etape 3 : Clairement, $\mathcal{A}$ cartes délimitées en ensembles équicontinus de $C[0,T]$.

Nous concluons que $\mathcal{A} : C[0,T] \to C[0,T]$ est continu et complètement continu.

Etape 4 : Limite a priori.
Nous montrons maintenant qu'il existe un ensemble ouvert $U \subset C[0,T]$ avec $u \neq \mu\mathcal{A}(u)$ pour $\mu \in (0,1)$ et $u \in \partial U$. Soit $u \in C[0,T]$ et $u = \mu\mathcal{A}(u)$ pour certains $0 < \mu < 1$. Ainsi Pour chaque $t \in [0,T]$, nous avons :

$$u(t) \leq \mu \int_0^t G(t,s) \left| f\left(s, u(s), {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(s)\right)\right| ds. \tag{2.63}$$

Par (**H3**), Pour tout solution $u \in C[0,T]$, du problème (2.18), nous avons :

$$|u(t)| = \left| \int_0^t G(t,s) f\left(s, u(s), {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(s)\right) ds \right| \leq \int_0^t G(t,s) \left| {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(s)\right| ds. \tag{2.64}$$

Alors pour chaque $t \in [0,T]$, on a :

$$\left| {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t)\right| = \left| f\left(t, u(t), {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t)\right)\right| \leq a(t) + b(t)|u(t)| + c(t)\left| {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t)\right|. \tag{2.65}$$

Alors ;

$$\begin{aligned} \left| {}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t)\right| &\leq \frac{1}{1-c^*}\left(a^* + b^*|u(t)|\right) \\ &\leq M_0 + M_1|u(t)|. \end{aligned}$$

D'où la

$$|u(t)| \leq \frac{M_0 T^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)} + \int_0^t M_1 G(t,s)\,|u(s)|\,ds. \tag{2.66}$$

Après le lemme de Gronwall , nous avons :

$$|u(t)| \leq \frac{M_0 T^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \exp\left(\frac{M_1 T^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}\right). \tag{2.67}$$

Ainsi

$$\|u\|_\infty \leq \frac{M_0 T^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \exp\left(\frac{M_1 T^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}\right) = M_2. \tag{2.68}$$

Soit :

$$U = \{u \in C[0,T] : \|u\|_\infty < M_2 + 1\}. \tag{2.69}$$

Par notre choix de U, il n'y a pas $u \in \partial U$ tell que $u = \mu \mathcal{A}(u)$, pour $\mu \in (0,1)$.
en conséquence du théorème de Leray-Schauder , $\mathcal{A}$ a un point fixe u dans U qui est une solution à (2.18) ■

Exemples

Exemple 1. Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} {}^1\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{1}{2}} u(t) = \frac{\cos(t)}{\pi\left(\sqrt{2}\cos(t)+\sin(t)\right)\left[1+|u(t)|+\left|{}^1\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{1}{2}} u(t)\right|\right]}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{2.70}$$

Définir

$$f(t,u,v) = \frac{\cos(t)}{\pi\left(\sqrt{2}\cos(t)+\sin(t)\right)[1+|u|+|v|]}, \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad u,v \in \mathbb{R}. \tag{2.71}$$

Parce que $\sin(t)$, $\cos(t)$ est fonction continu positif $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, la fonction f est conjointement continue. Pour tout $u, v, \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a , $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(t) \leq 1$, et $0 \leq \sin(t) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc

$$|f(t,u,v) - f(t,\tilde{u},\tilde{v})| \leq \frac{1}{\pi}\left(|u-\tilde{u}| + |v-\tilde{v}|\right). \tag{2.72}$$

Donc, l'hypothèse (**H2**) est satisfait de $\lambda = \beta = \frac{1}{\pi} < 1$. Il reste à montrer que la condition (2.37)

$$\frac{\lambda T^{\rho\alpha}}{(1-\beta)\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)} = \frac{\left(\frac{1}{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{1}{\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(\pi-1)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \simeq 0.4669 < 1, \tag{2.73}$$

est satisfaite. Il découle du théorème 2.3.1, que le problème (2.70) admet une solution unique.

Exemple 2. Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^{1}\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{1}{2}} u\left(t\right) = \frac{\cos(t)\left[2+|u(t)|+\left|{}^{1}\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{1}{2}} u(t)\right|\right]}{\pi\left(\sqrt{2}\cos(t)+\sin(t)\right)\left[1+|u(t)|+\left|{}^{1}\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{1}{2}} u(t)\right|\right]}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \\ u\left(0\right) = 0 \end{cases} \tag{2.74}$$

Définir

$$f\left(t,u,v\right) = \frac{\cos\left(t\right)\left[2+|u|+|v|\right]}{\pi\left(\sqrt{2}\cos\left(t\right)+\sin\left(t\right)\right)\left[1+|u|+|v|\right]}, \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad u,v \in \mathbb{R}. \tag{2.75}$$

De toute évidence, la fonction f est conjointement continue. Pour chaque $u, v, \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a

$$\left|f\left(t,u,v\right) - f\left(t,\tilde{u},\tilde{v}\right)\right| \leq \frac{1}{\pi}\left(|u-\tilde{u}| + |v-\tilde{v}|\right). \tag{2.76}$$

Donc, l'hypothèse (**H2**) est satisfait de $\lambda = \beta = \frac{1}{\pi} < 1$. Aussi, nous avons :

$$\left|f\left(t,u,v\right)\right| \leq \frac{\cos\left(t\right)}{\pi\left(\sqrt{2}\cos\left(t\right)+\sin\left(t\right)\right)}\left(2+|u|+|v|\right). \tag{2.77}$$

Ainsi, l'hypothèse (**H3**) est satisfaite avec

$$a\left(t\right) = \frac{2\cos\left(t\right)}{\pi\left(\sqrt{2}\cos\left(t\right)+\sin\left(t\right)\right)}, \qquad et \quad b\left(t\right) = c\left(t\right) = \frac{\cos\left(t\right)}{\pi\left(\sqrt{2}\cos\left(t\right)+\sin\left(t\right)\right)}. \tag{2.78}$$

Nous avons aussi :

$$a^* = \frac{2}{\pi}, \quad et \quad b^* = c^* = \frac{1}{\pi} < 1, \quad et \quad M_0 = \frac{2}{\pi-1}, \quad et \quad M_1 = \frac{1}{\pi-1}. \tag{2.79}$$

Et condition

$$\frac{M_1 T^{\rho\alpha}}{\rho^{\alpha}\Gamma\left(\alpha+1\right)} = \frac{\left(\frac{1}{\pi-1}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\left(\pi-1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \simeq 0.4669 < 1. \tag{2.80}$$

Alors par des théorèmes 2.3.2, 2.3.3 le problème (2.74) admet au moins une solution.

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème Cauchy et problème aux limite pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens Riemann-Liouville, Caputo et sens de Katugampola. avec conditions locales.
Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe : (Banach, Schauder ...etc)

Bibliographie

[1] R.P.AGARWAL, M.MEEHANET, D.O'REGAN, Fixed point theory and application, Cambridge tracts in mathematics, university press, 2001.

[2] B.Basti, Y.Arioua, N.Benhamidouche, Some new existence and uniqueness results for nonlinear implicit fractional differential equation, 2018.

[3] M.Benchohra, S. Hamani, S.K. Ntouyas, boundary value problems for differential equations with fractional order, Surv. Math. Appl. 3 (2008), 1-12.

[4] A.Granas, J.Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[5] T.HOUMOR, Analyse du Chaos dans un Systéme équations Diférentielles Fractionnaires, Thése Doctorat en sciences, Univ de Constantine, 2014.

[6] U. N. Katugampola, *A new approach to generalized fractional derivatives*, Math. Anal. Appl. **6** (2014), no. 4, 1–15.

[7] U. N. Katugampola, *New approach to a generalized fractional integral*, Appl. Math. Comput. **218** (2011), no. 3, 860–865.

[8] A.A.Kilbas, H.H.Sriva stava, J.J.Trujillo, Theory and Applications of Fractional Dierential Equations, Elsevier Science B.V.Amsterdam, 2006.

[9] A.A.Kilbas, J.J.Trujillo, Diferential equations of fractional order, methods, results and problems II, Appl.Anal. 81 (2002) ; 435-493.

[10] H.Medjekal, Existence et Unicité de la Solution D'une équation Différentielle Fractionnaire de Temps Infini dans un Espace de Banach, Thése Doctorat en sciences, Univ de Annaba, 2015.

[11] K.S.Miller, B.Ross, An Introduction to the Fractional calculus and Fractional Differential Equation, Wiley and sons, New York, 1993.

[12] S. A. Murad, S. Hadid, *Existence and uniqueness theorem for fractional differential equation with integral boundary condition*, J. Frac. Calc. Appl. **3** (2012), no. 6, 1-9.

[13] I.Podlubny, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, 1999.

[14] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integral and Derivatives Theory and Applications*, Gordon and Breach, Switzerland, 1993.

[15] S.Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional equations, Electron.J.Dif. Equat. 36 (2006) ; 1-12.

ملخص

في هذا العمل قدمنا بعض النظريات على الوجود و الوحدانية لبعض حلول المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الكسرية.
قدمنا دراسة حول وجود و وحدانية حلول لبعض المسائل الحدية و معادلة كوشي ذات المشتقات الكسرية باستعمال مشتقات من نوع ريمان و كبوتو و كاتي غمبولا.

الكلمات المفتاحية: **الحساب الكسري، مسائل حدية، نظريات النقطة الصامدة، قيم ابتدائية، الوجود والوحدانية.**

Résumé

Dans ce travail, on fait une synthèse de certains travaux sur l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielles fractionnaire.
Nous présentons quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution de problème de Cauchy et problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaire de type Riemann-Liouville , de type Caputo et de type Katugampola.

Mots-clés : ***Calcul fractionnaire, problème aux limites, théorème de point fixe, problème à valeur initiale, existence et unicité .***

Abstract

In this Work we present the existence and uniqueness results of solutions of fractional differential equations of Riemann-Liouville , Caputo and of Katugampola for boundary value problems and Cauchy problems.

Keywords ***: Fractional calculus ,boundary value, fixed point theorems, initial value problem, existence and uniqueness.***